

**NYE METODER INNEN RISIKOANALYSE OG KONTROLL:  
SKALERING I FINANSIELLE DATA**

Johannes A. Skjeltop

Konsulent  
Forskningsavdelingen

# Innhold

INGRESS

INNLEDNING .....	4
SKALERING I FINANSIELLE DATA .....	5
HVORFOR HAR VI SKALERING I FINANSIELLE TIDSSERIER? .....	8
TYKKHALEDE FORDELINGER SOM BESKRIVELSE AV KURSFLUKTUASJONER .....	10
OPPSUMMERING.....	12

## **Ingress:**

*Forvaltningen av Petroleumsfondet har stilt Norges Bank overfor mange problemstillinger som er praktisk så vel som teoretisk utfordrende og interessante. I denne artikkelen skal jeg se litt nærmere på risikokontroll og risikoevaluering av aksjer og porteføljer sett i lys av nye metoder spesielt knyttet til et felt kalt ekstremverdi teori og fraktalmatematikk. Det man i første omgang ønsker å oppnå ved hjelp av fraktalmatematikk er en bedre forståelse og beskrivelse av de fluktuasjonene man observerer i finansielle markeder. Dette vil også kunne gi oss et verktøy til å analysere og behandle ekstreme halesannsynligheter på en ny og forhåpentligvis bedre måte. Hovedformålet med artikkelen er å gi en generell orientering om disse metodene, nytten metodene kan ha innenfor finansiell forskning og mulige praktiske anvendelser. Som en kuriositet kan det nevnes at disse metodene også benyttes til å analysere de oljeførende sedimentene i Nordsjøen slik at man får en mer effektiv oljeutvinning.*

## Innledning

Fraktalmatematikk har sitt utgangspunkt i naturvitenskap, men har i løpet av de siste årene kommet inn i empirisk finansiell forskning gjennom økt interesse for kaosteori og relaterte emner. Dette er en matematisk og empirisk metode som blant annet har som formål å kunne behandle de ekstreme halesannsynlighetene som man ofte opplever i finansielle markeder. Ta for eksempel S&P-500 indeksen<sup>1</sup>, som hadde en gjennomsnittlig årlig avkastning på 16.2% for perioden 1983 til 1992. I løpet av de 2526 handledagene i denne perioden kom 80% av avkastningen fra de 40 beste dagene (definert som de dagene indeksen økte mest)<sup>2</sup>. Dette tilsvarer 1.6% av de totalt 2526 handledagene i perioden. Et annet eksempel er de fluktuasjonene vi i løpet av det siste halvåret har opplevd i Norge. De mest ekstreme fluktuasjonene har ligget på nesten 5% endring i totalindeksen i løpet av én enkelt dag og over 40% endring bare i løpet av Oktober. Dersom man med disse eksemplene i tankene ser på hva finansiell teori sier om slike hendelser, vil man raskt oppdage at log-normalfordelingen, normalfordelingen og Brownske bevegelser, som ligger til grunn for mange opsjonsprisinde modeller, CAPM osv., gir som resultat at slike hendelser ikke skal kunne forekomme med den frekvensen man opplever i virkeligheten.

Man har lenge visst at den empiriske sannsynlighetsfordelingen til f.eks. aksjeavkastning eller indeksavkastning er *leptokurtosisk*; dvs. at halene på den empiriske sannsynlighetsfordelingen er mye fetere enn normalfordelingen, i tillegg til at det er en større sannsynlighet for gjennomsnittlige fluktuasjoner. Et eksempel på dette kan sees i figur 1 hvor den empiriske sannsynlighetsfordelingen for de standardiserte daglige logaritmiske endringer for S&P-500 indeksen for perioden 1926-1993 er sammenlignet med normalfordelingen. I figur 1a ser vi at det er en mye større sannsynlighet for utfall rundt gjennomsnittet i forhold til hva normalfordelingen tilsier. Ved å ta logaritmen på den vertikale akse får vi i figur 1b et bedre inntrykk av de tykke halene i den empiriske fordelingen sammenlignet med normalfordelingen. I første omgang kan det virke som om disse sannsynlighetene er ubetydelige, men det er viktig å merke seg at sannsynligheten for å oppleve fluktuasjoner større enn  $\pm 4$  standardavvik er mer enn 150 ganger større enn for normalfordelingen<sup>3</sup>. Fordelingen til S&P 500 indeksen er et typisk

---

<sup>1</sup> Standard & Poor's indeks består av 500 aksjer i som er handlet på NYSE (New York Stock Exchange), AMEX (American Stock Exchange), NASDAQ (National Market System).

<sup>2</sup> Tall hentet fra Bouchard et.al. 1998. "Taming Large Events: Optimal Theory for Strongly Fluctuating Assets". *International Journal of Theoretical and Applied Finance* Vol. 1, No. 1, 25-41.

<sup>3</sup> Sannsynligheten for en endring større enn  $\pm 4$  std.avvik er for normalfordelingen ca. 0.0048% sammenlignet med ca. 0.86% historisk sett.

eksempel på hva man finner for de fleste aksjeindekser og enkeltaksjer. I figur 2 ser vi en logaritmisk graf av de kumulerte negative og positive halene for S&P 500 indeksen sammenlignet med normalfordelingen. Den viser den kumulerte sannsynligheten for at man skal få et utslag som er større enn et gitt standardavvik. Dette er et enkelt eksempel, men illustrerer et problem ved å benytte normalfordelingen for modellering av aksjekursfluktasjoner ettersom den karakteriserer en annen prosess enn den som genererer de virkelige dataene. Nå er det viktig at man ikke legger for stor vekt på de empiriske fordelingene som er basert på historiske data, ettersom disse kan inneholde data fra perioder som ikke nødvendigvis reflekterer dagens situasjon på grunn av strukturendringer, ny teknologi, nye finansielle produkter osv. På den annen side er det viktig å se etter generelle egenskaper og strukturer i historiske data som kan utnyttes i modeller som har til hensikt å beskrive markedet.

Et verktøy som kan hjelpe oss med dette er det som kalles skaleringsanalyse eller fraktalmatematikk. Dette er en type analyse som har sin opprinnelse i kaosteori og benyttes til å karakterisere komplekse prosesser. Det som er spesielt interessant i forhold til finansielle applikasjoner, er metodens evne til å kunne beskrive ekstreme halesannsynligheter. I neste avsnitt skal vi se litt nærmere på skalering, og i senere avsnitt på anvendelser.

## Skalering i finansielle data

For å få en intuitiv forståelse av hva skalering er, må vi se på et eksempel fra et annet felt enn økonomi. La oss tenke oss at vi skal måle lengden på Norges kystlinje. Vi starter med en målestav på 10 km og finner en lengde på kysten. Deretter reduserer vi lengden på målestaven til 1 km, og oppdager at vi får en lenger kyst ettersom vi kan måle flere bukter og andre geografiske detaljer. Det samme gjelder dersom man velger målestaver på 10 m, 1 m osv. Altså kan man si at norskekysten ikke har noen typisk lengde. Dette er et måleproblem man møter i svært mange sammenhenger, også innenfor finans. Spørsmålet er da hva som er den relevante måleenheten. Det viser seg at det er et fast negativt eksponensielt forhold mellom lengden på målestaven og den lengden man får på kysten; desto kortere målestav jo lenger kyst. Forholdet mellom disse to variablene kalles skaleringsfaktoren og kan brukes som et hjelpemiddel for å karakterisere de fleste strukturer og prosesser. Altså har man en generell måleenhet som sier noe om hvordan strukturen eller dynamikken i prosessen vi analyserer endrer seg i forhold til frekvensen på observasjonene eller tidshorizonten. Innenfor kaosteori er skalerings-

analyse en av de viktigste metodene for å beskrive dynamikken i komplekse systemer. Matematikken bak skalering ble sammenfattet og generalisert av Mandelbrot i 1986, som også kalte den matematiske metoden for fraktalgeometri. Fraktalgeometri har vist seg å være et kraftig verktøy og benyttes innenfor mange naturvitenskapelige retninger for analyseformål. De siste årene har forskningen innenfor finansiell analyse og modellering ved hjelp av fraktalmatematikk økt kraftig. Dette fordi man også finner skaleringslover i finansielle data. La oss se på hvordan skalering brukes i praksis.

Et velkjent eksempel på bruken av skalering i finans er ved konverteringen av daglig varians til for eksempel 21 dagers varians<sup>4</sup>. Dette gjøres ved at man multipliserer den daglige variansen med kvadratroten av 21, dvs. at man forutsetter at variansen skalerer med kvadratroten av tiden. Når man forutsetter uavhengighet og normalitet i fluktuationene, er dette en riktig måte å fremskrive varians på. Dette er noe som er mye brukt f.eks. i forbindelse med Value At Risk (VAR) metode i tillegg til at det er et viktig element i Black-Scholes opsjonsprisindeformelen. Det er da viktig å spørre seg hva konsekvensen er dersom for eksempel variansen ikke skalerer med kvadratroten av tiden, og den empiriske sannsynlighetsfordelingen også har andre egenskaper enn hva man forventer fra normalfordelingen. Ta for eksempel den originale Black-Scholes formelen for prising av Europeiske opsjoner. Den har en tendens til å verdsette opsjoner som er "deep-out-of-the-money" som tilnærmet verdiløse. Dette til tross for at man i markedet ser at disse opsjonene handles til en verdi som ligger over Black-Scholes prisen. Det er mange forklaringer for dette systematiske avviket mellom Black-Scholes prisene og opsjonsprisene man ser i markedet. Den mest fornuftige forklaringen er de tykke halene i den empiriske sannsynlighetsfordelingen for aksjeavkastningen. Markedet vet erfaringsmessig at sannsynligheten for store svingninger er mye større enn normalfordelingen tilsier, og priser opsjonene deretter.

Også i forbindelse med VAR analyse, som har blitt et populært verktøy de siste årene, er det viktig med skalering, ettersom man også her fremskriver daglig varians omregnet til kroner i forhold til kvadratroten av horisonten man anser som relevant. Dette skal illustrere hvor mye man kan risikere å tape med for eksempel 1% sannsynlighet i løpet av de neste 4 ukene. Dersom porteføljen man sitter med har andre skaleringssegenskaper, betyr dette at man enten kan komme til å under- eller overestimere VAR verdien, spesielt for lengre tidshorisonter.

---

<sup>4</sup> Tallet 21 kommer av at det er 21 handledager i én måned.

Altså ser vi at skalering i sin enkleste form er viktig<sup>5</sup>. Når man analyserer finansielle tidsserier ved hjelp av skalering ser man på hvordan prosessens statistiske egenskaper endrer seg når vi varierer observasjonsintervallet/tidshorisonen. I første omgang er dette teoretisk interessant fordi det kan brukes til å undersøke om forskjellige tidsserier har egenskaper som er forskjellig eller samsvarer med en uavhengig "tilfeldig gange" (random walk). Den mest kjente metoden for å gjennomføre en slik skaleringsanalyse er R/S-analyse<sup>6</sup> som beregner hvordan størrelsen på fluktuasjonene endrer seg når tidshorisonen øker. Dersom man gjennomfører en R/S-analyse på en ren tilfeldig gange eller andre uavhengige prosesser, vil man finne at fluktuasjonene i tidsserien skalerer med tidshorisonen opphøyet i 0.5, hvor 0.5 er skaleringsfaktoren. I forbindelse med R/S-analyse kalles skaleringsfaktoren for Hurst eksponenten (H). Altså skalerer R/S verdiene for en tilfeldig uavhengig prosess med kvadratrotten av tiden, eller  $t^H$ . Når man gjennomfører analysen på tidsserier for aksjer eller aksjeindekser får man oftest en H som ligger høyere enn dette. For de fleste finansielle tidsserier ligger H i intervallet fra 0.55 til 0.65. I figur 3 har vi et eksempel på et resultat fra en R/S-analyse på totalindeksen på Oslo Børs for perioden 1983-1994 som gir som resultat en skaleringsfaktor på  $H \approx 0.60$ . Dette resultatet er mer enn 2 standardavvik over det som er forventet av en tilfeldig uavhengig prosess. Hurst eksponenten estimeres ved å kjøre en regresjon på R/S verdiene mot størrelsen på tidsvinduet (dt). Linjen som ligger lavest illustrerer hva man forventer ved en normal skalering med  $H=0.5$ . Når man har en slik ikke-normal skalering indikerer det at prosessen inneholder langminne-effekter som gjør at tidsserien har en tendens til å "trende" i tillegg til at prosessen gjennomfører flere og større hopp enn hva som er forventet av en tilfeldig gange. Dette fører til at prosessen beveger seg mer i løpet av en tidsindeks  $t$  enn en tilfeldig prosess. En ting som er viktig å merke seg, er at dette skjer på alle tidshorisoner. Dersom man tenker tilbake på kystlinjen ligner den statistisk på seg selv dersom man zoomer seg inn på en bit av den og blåser den opp. Kvalitativt gjelder det samme for tidsserier selv om de to ikke kan sammenlignes for øvrig. Vi skal komme nærmere inn på hvorfor dette er relevant for finans litt senere i artikkelen.

En annen karakteristikk som også er viktig å ta hensyn til, er at den empiriske fordelingen for mange finansielle tidsserier, spesielt for aksjer, har en tendens til å konvergere mot normalfordelingen når vi øker tidshorisonen. Om dette kommer av at man ved å øke tidsintervallet ender opp med færre observasjoner slik at man ikke får et godt bilde av den virkelige

---

<sup>5</sup> Mer avanserte former for skaleringsanalyse kalles multifraktalanalyse hvor man får som resultat en fordeling av skaleringsfaktorer.

<sup>6</sup> Reskalert Variasjonsbredde Analyse (Rescaled Range Analyse)

fordelingen eller at man virkelig har en slik konvergens er vanskelig å si, men mye tyder på at det siste er tilfellet. Ved hjelp av skaleringsanalyse kan man avdekke en slik konvergens ved at man ser en endring i skaleringsforholdet ( $H$ ) fra en bestemt tidshorison. I R/S grafen vil man da se et knekkpunkt. Vanligvis finner man at man for korte tidshorisonter har en raskere skalering enn for lange tidshorisonter, altså har man en avtagende skalering. Dette betyr at fluktuasjonene relativt til tidshorisonten er større for korte tidshorisonter enn for lengre horisonter. Et eksempel på en slik skaleringsendring kan sees i figur 4 hvor en R/S-analyse er gjennomført på Norsk Hydro-aksjen for perioden 1986-1996. Vi ser her en markert skaleringsendring f.o.m. 200 dager fra  $H=0.59$  til  $H=0.47$ . Dette betyr at tidsserien for lengre tidshorisonter har en tendens til å returnere raskere til gjennomsnittet enn for kortere horisonter, hvor tidsserien beveger seg lenger og/eller har større fluktuasjoner. Dette støtter opp under empiriske undersøkelser som konkluderer med at aksjeavkastning har en tendens til å reverse mot gjennomsnittet for lange tidshorisonter ("mean reversion")<sup>7</sup>. På den annen side finner man ikke en slik skaleringsendring i alle tidsserier som er undersøkt, slik at dette ikke nødvendigvis gjelder generelt.

## Hvorfor har vi skalering i finansielle tidsserier?

Mye tyder på at man generelt har en ikke-normal skalering i finansielle tidsserier. En slik ikke-normal skaleringsoppførsel kan oppsummeres som at tidsserien beveger seg mer enn en "random walk", noe som hovedsakelig kommer av at prosessen "trender" i tillegg til at den har flere og større hopp/ekstremverdier enn en "random walk". Dette gjelder spesielt for korte tidshorisonter/frekvenser i den forstand at fluktuasjonene er større og flere enn normalfordelingen tilsier både for 10 minutt observasjoner, 1 ukes observasjoner osv. Trendingen kommer av langminne-effekter i prosessen som følge av at positive endringer har større sannsynlighet for å bli etterfulgt av positive endringer og omvendt. Dette kalles "persistence" og betegner at prosessen har et minne og en treghet som driver kursene.

Så hva betyr egentlig det at man finner ikke-normal skaleringsoppførsel i finansielle tidsserier? Hvilke egenskaper i markedet er det som forårsaker dette? Det er flere forklaringer som har vært foreslått. En hypotese som kalles den fraktale markedshypotese (FMH) legger

---

<sup>7</sup> Fama, E.F og K.R French. 1988. "Permanent and Temporary Components of Stock Prices". *Journal of Political Economy* 96, 246-273.

stor vekt på at markedsaktørene har forskjellige investeringshorisonter og dermed fokuserer på forskjellig type informasjon når de vurderer sine strategier. Dersom man har forskjellige typer investorer med investeringshorisonter på for eksempel én dag, én uke, ett år osv. kan man tenke seg at disse er utsatt for fluktasjoner beskrevet av den empiriske sannsynlighetsfordelingen for sin respektive tidshorison. Generelt forventer man at disse investortypene blir påvirket av forskjellig type informasjon, hvor de kortsiktige investorene eller spekulantene er mer opptatt av kortsiktige "trender" enn den langsiktige investoren, som er mer opptatt av fundamentale forhold<sup>8</sup>. FMH forklarer de fete halene ved at man får en for stor overvekt av investorer for én spesiell investeringshorison. Dersom man har en relativt jevn fordeling av investorer med mange forskjellige tidshorisonter vil langsiktige investorer som ikke legger vekt på for eksempel daglige kursfluktasjoner overta de aksjene som ønskes solgt ved økt salgsinteresse fra de kortsiktige investorene, og dermed skape en form for "stabilitet" i markedet. En slik kortsiktig salgsinteresse kan komme av for eksempel tekniske salgssignaler og lignende hos de kortsiktige investorene. Dersom det blir en for stor overvekt av kortsiktige investorer vil dette medføre store hopp i kursene ettersom "alle" aktører har lik investeringshorisonter og det ikke er nok langsiktige investorer tilstede i markedet som kan overta de kortsiktige investorenes aksjer. Altså vil man få likviditetsproblemer i markedet med den følge at markedet tørker ut og man får store utslag i kursene. For å se et eksempel på dette trenger man bare å gå et par måneder tilbake i tid. Spekulantene/traderne, som per definisjon er kortsiktige, ble skremt bort som følge av rystelser i markedene verden over. Usikkerheten ble for stor. Dette førte igjen til at markedet tørket ut. Langsiktige investorer som ønsket å selge seg ned i aksjer på basis av endrede langsiktige forventninger, oppdaget raskt at interessen for å overta disse aksjepostene ikke var til stede. Dermed opplevde man store negative utslag i kursene. Man kan si at den stabiliserende faktoren som de kortsiktige tradere kan være i forhold til å gjøre markedet likvid, var borte.

En annen bit av FMH legger vekt på psykologiske faktorer som en av hovedkreftene bak "trending". Det betyr at investorer på alle tidshorisonter påvirker hverandre både gjennom handlinger og informasjonstolkning. Dette gjør at man får en form for "feedback" i kursutviklingen som gjør at kursene har en tendens til å bevege seg mer enn hva som hadde vært tilfellet dersom man hadde hatt helt uavhengige investorer. I tillegg sier FMH at investorer aggregerer informasjon til man kommer til en terskel hvor kun en tilsynelatende ubetydelig tilførsel av ny informasjon gjør at for eksempel langsiktige investorer unisont ønsker å endre

---

<sup>8</sup> Bedriftsspesifikke forhold som for eksempel inntjening, organisasjonsforhold og makroøkonomiske variable.

porteføljesammensetting. Dette vil da gjøre at man kan få store hopp i kursene. Dette er i konflikt med den effisiente markedshypotesen ettersom markedet i følge FMH ikke nødvendigvis tilpasser seg umiddelbart i forhold til ny informasjon, men aggregerer informasjon over tid. I neste avsnitt skal vi se på metoder basert på skalering som kan hjelpe oss med å ta hensyn til slike ekstreme fluktuasjoner.

## Tykkhalede fordelinger som beskrivelse av kursfluktuasjoner

De tykke halene har vært forsøkt forklart og simulert ved hjelp av flere metoder hvor de mest kjente er forskjellige variasjoner av ARCH<sup>9</sup> modellene. Disse tar hensyn til at man har avhengighet mellom volatiliteten for påfølgende perioder. Dette kalles også "volatilitets clustering" som innebærer at man har perioder med høyere variasjoner enn i andre perioder, som man ser i virkelige kursdata. En slik sammenheng betyr at man har en viss mulighet til å predikere volatilitet, noe som er svært viktig i forhold til f.eks. VAR metode og andre risikostyringsmetoder. Disse modellene er bra egnet til å beskrive sannsynlighetsfordelingen for en bestemt tidshorison. På den annen side har det vist seg at slike modeller ikke klarer å gjenspeile skaleringsoppførselen i finansielle data. Tester og simuleringer viser at de observerte skaleringsenskapene man ser i finansielle tidsserier ikke lar seg gjenskape i ARCH og GARCH modeller. I forhold til fraktalmatematikk er dette svært viktig ettersom skaleringen sier noe fundamentalt om dynamikken i tidsserier.

Én familie sannsynlighetsfordelinger som tar hensyn til både de tykke halene og skaleringsoppførselen i dataene, er en familie kalt stabile Lévy-fordelinger. Disse er ikke av ny dato<sup>10</sup>, men har som følge av matematiske vanskeligheter mer eller mindre blitt ignorert til fordel for normalfordelingen. De siste årene har man fått ny interesse for Lévy-fordelingene, ettersom man har fått et forbedret matematisk og statistisk verktøy på basis av forskning innen kaosteori og utvikling innenfor finansiell matematikk. Dette verktøyet, fraktalmatematikken, er direkte knyttet opp mot skalering som vi kom inn på tidligere i artikkelen. Den viktigste parameteren i disse fordelingene er den karakteristiske eksponenten ( $\alpha$ ). Denne sier noe om hvor leptokurtosisk sannsynlighetsfordelingen er, dvs. hvor tykkhålet og hvor konsentrert den er rundt gjennomsnittet. Det er flere måter å estimere  $\alpha$  på men den enkleste er via R/S-

---

<sup>9</sup> Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (Autoregressiv Betinget Heteroskedastisitet)

<sup>10</sup> Mandelbrot, B. 1963. "The Variation of Certain Speculative Prices". *Journal of Business* 36, 394-419.

analyse. Dette skyldes at sammenhengen mellom Hurst eksponenten ( $H$ ) og den karakteristiske eksponenten ( $\alpha$ ) viser seg å være  $\alpha=1/H$ . Ved å utnytte denne sammenhengen kan man ved R/S-analyse estimere fordelingsfunksjonen til en prosess beskrevet ved Lévy fordelingen. I figur 5 har vi et eksempel på dette, hvor det er gjennomført en slik analyse på OBX indeksen på Oslo Børs. I figuren ser vi den standardiserte empiriske sannsynlighetsfordelingen for 5 minutt endringer i OBX-indeksen sammenlignet med normalfordelingen og den teoretiske Lévy fordelingen basert kun på  $\alpha$ , estimert fra de empiriske dataene gjennom R/S analyse. Vi ser at føyningen er svært god ut til 6-7 standardavvik, og relativt god helt ut til 15-20 standardavvik.

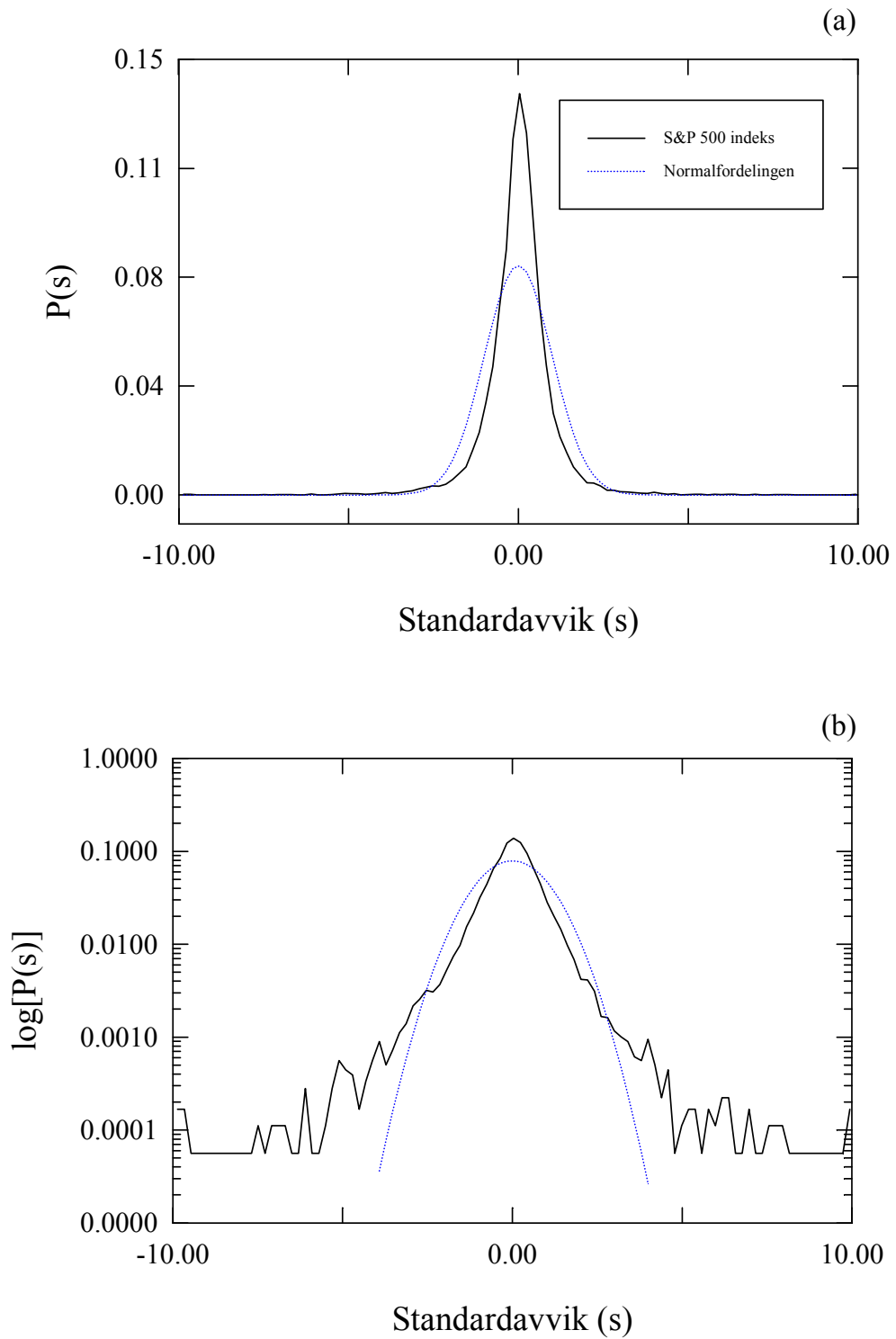
På den annen side viser det seg at den originale Lévy-fordelingen har noen egenskaper som gjør den vanskelig å håndtere i modellsammenheng og i praksis. For det første har fordelingsfunksjonen uendelig varians når  $H>0.5$ . For det andre har ikke fordelingsfunksjonen noen lukket form løsning for  $H\neq 0.5$ . Dette betyr at fordelingen må beregnes numerisk, noe som kan være svært tidkrevende. Den tredje egenskapen som gjør den mindre attraktiv, er at man forutsetter et fast skaleringsforhold for alle tidshorisonter. Som vi har sett er ikke dette nødvendigvis riktig, siden flere tidsserier har en tendens til å konvergere mot normalfordelingen for lange tidshorisonter, noe som betyr at man har to skaleringsforhold å forholde seg til.

Det siste året har man kommet frem til en modifisert Lévy-fordeling som løser alle de tre problemene nevnt i avsnittet over. Denne fordelingen kalles trunkert Lévy-fordeling (TLF), og er svært interessant i forhold til opsjonsprisning og VAR analyse. I disse fordelingene har man både endelig varians, lukket form løsning for fordelingsfunksjonen samt konvergens mot den Gaussiske fordelingen for lange tidshorisonter avhengig av hvordan de empiriske dataene ser ut. Altså er disse lettere å behandle både teoretisk og i praksis selv om det gjenstår mye forskning for å få en full forståelse for hvordan disse fordelingene kan brukes. Et viktige område man må se nærmere på i forbindelse med porteføljesammensetting, er hvilke effekter dette har for porteføljerisiko; det vil si hva som skjer når trunkerte Lévy-fordelinger med forskjellige  $H$  aggregeres, noe som er tilfellet i praksis hvor en portefølje vanligvis inneholder instrumenter med mange forskjellige  $H$ .

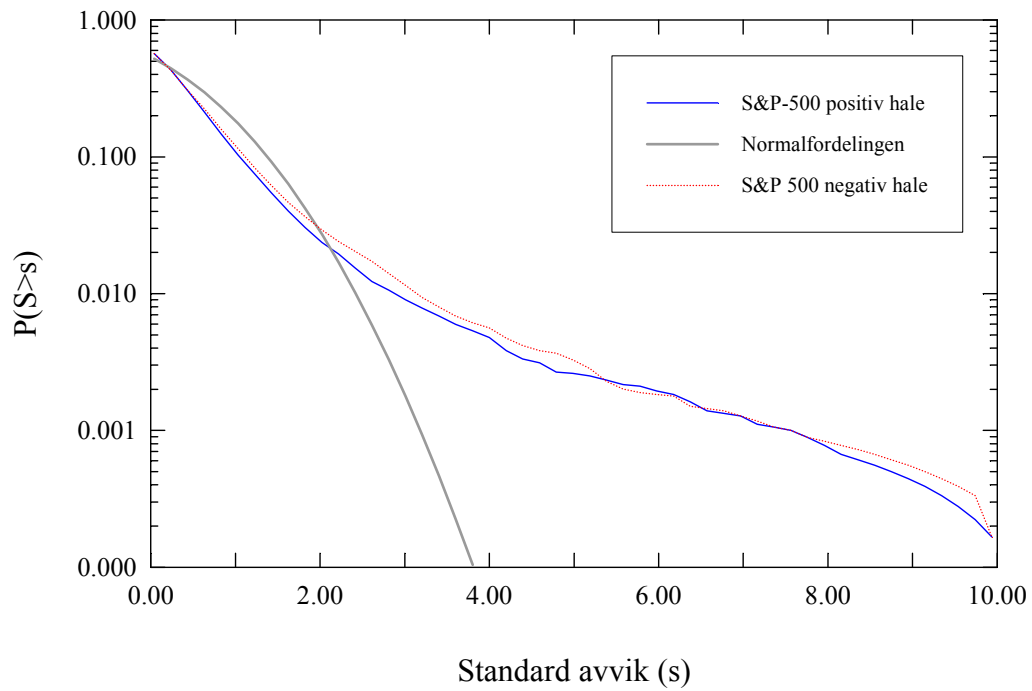
## Oppsummering

Jeg har i denne artikkelen omtalt noen aspekter ved en metode som er svært lovende når det gjelder beskrivelsen av fluktuasjoner i finansielle data. Begreper som skalering og fraktalmatematikk tar hensyn til egenskaper man finner i finansielle tidsserier, og som man i liten grad har tatt hensyn til i finansielle modeller tidligere. I første omgang blir det satt fokus på den empiriske sannsynlighetsfordelingen for forskjellige tidshorisonter, dvs. for varierende observasjonsintervaller. I motsetning til Gaussiske prosesser som forutsetter at prisvariasjonene skalerer med kvadratroten av tiden, har de virkelige dataene en skaleringsoppførsel som ofte er forskjellig fra dette. Dette betyr at man ved å ekstrapolere for eksempel daglig varians til månedlig varians kan over-/undervurdere variansen dersom man benytter seg av Gaussiske "lover". Ved å benytte seg av metoder fra fraktalmatematikk har man nå et verktøy som tar hensyn til den ikke-normale skaleringen i dataene, og legger til rette for at man kan benytte seg av dette i modeller. Det viser seg at prosesser, da spesielt Lévy-prosesser som baserer seg på skalering, gir oss en fordelingsfunksjon som er svært lik den man finner for de empiriske dataene. En interessant observasjon er at man for mange aksjer og aksjeindekser ser at skaleringen endrer seg når man går ut over en bestemt tidshorizont. Dette betyr at egenskapene til prosessen også endrer seg i den forstand at man ser en konvergens mot en Gaussisk prosess. Dersom man er interessert i å se på tidshorizontproblemet er skaleringsendringer i tidsserier trolig et viktig moment å ta hensyn til. At man ser en slik konvergens, sammenfaller med undersøkelser som finner at aksjeavkastning har en tendens til å reversere mot gjennomsnittet for lange tidshorisonter ("mean reversion").

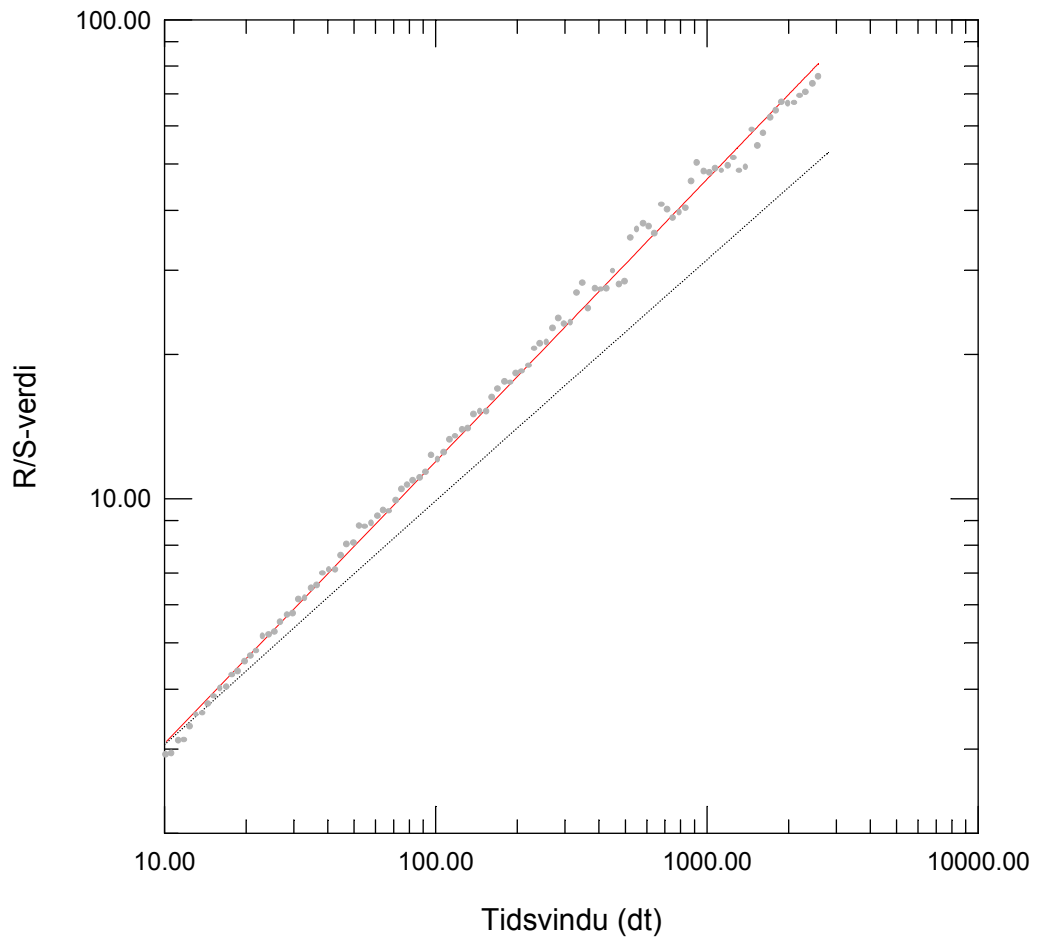
Som en oppsummering kan vi si at skaleringsanalyse og kaosteori ikke bare gir oss en alternativ forståelse av dynamikken i finansielle markeder, men metoden og konseptene kan også hjelpe oss med å utvikle de eksisterende modellene og teoriene som i dag brukes. Selve metodene er blitt en del av verktøykassen innenfor naturvitenskap. Innen få år er det god grunn til å tro at det samme vil skje innenfor finans.



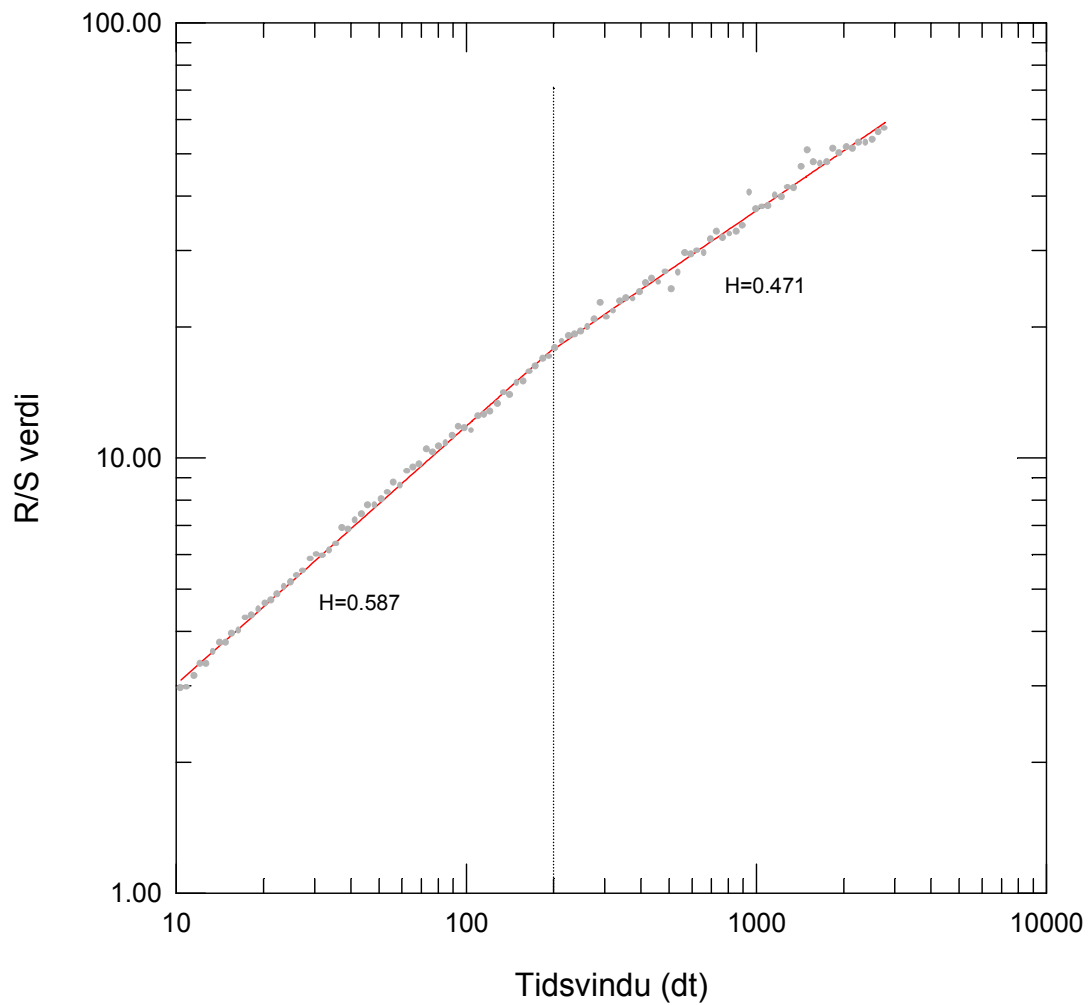
**figur 1:** (a) Den standardiserte empiriske sannsynlighetsfordelingen for daglige observasjoner på S&P 500 indeksen (heltrukket linje) sammenlignet med normalfordelingen (stiplet linje). (b) Samme som (a), men med logaritmisk y-akse for å fremheve de fete halene.



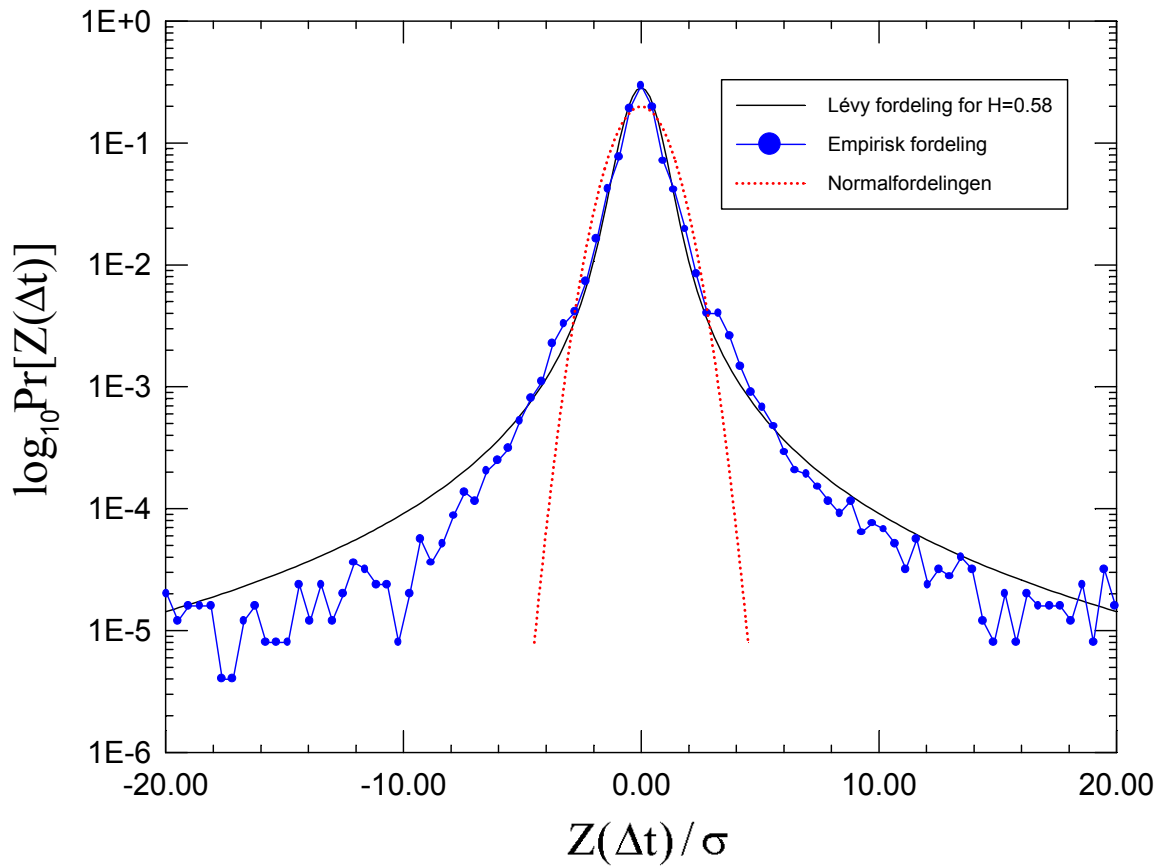
**figur 2:** Logaritmisk plot av de kumulerte sannsynlighetene for endringer større enn et gitt standardavvik. Både den negative og positive delen av sannsynlighetsfordelingen for S&P indeksen for perioden 1926-1993 er plottet sammen med normalfordelingen.



**figur 3:** R/S-analyse av totalindeksen på Oslo Børs. Ved å kjøre en regresjon (heltrukket linje) på R/S verdiene (punkter) mot størrelsen på tidsvinduet (dt) finner man en Hurst eksponent lik 0.59. Stiplet linje illustrerer skaleringsforholdet for en uavhengig random walk med  $H=0.5$ .



**figur 4:** R/S-analyse av Norsk Hydro for perioden 1986 til 1996. Vi ser at tidsserien har en skalering på  $H=0.587$  opp til tidshorisonter på ca. 200 dager. For tidshorisonter lengre enn 200 dager endres skaleringen til  $H=0.471$ .



**figur 5:** Den empiriske sannsynlighetsfordelingen for 5 minutt standardiserte endringer i OBX indeksen på Oslo Børs sammenlignet med den teoretisk Lévyfordelingen og normalfordelingen med tilsvarende varians og gjennomsnitt som for de empiriske dataene.  $H=0.58$  er estimert fra dataene ved hjelp av R/S analyse. Hvis  $H=0.5$  blir Lévy fordelingen identisk med normalfordelingen.